مشاوره تحصیلی هیوا

تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

مشاوره تخصصی ثبت نام مدارس ، برنامه ریزی درسی و آمادگی برای امتحانات مدارس

برای ورود به صفحه مشاوره مدارس کلیک کنید

برای ورود به صفحه نمونه سوالات امتحانی کلیک کنید

تماس با مشاور تحصیلی مدارس

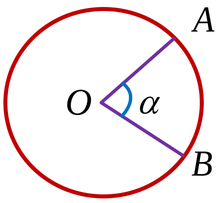
۹۰۹۹۰۷۱۷۸۹

تماس از تلفن ثابت

سؤالات و پاسخ تشریحی سؤالات فصل ۱ هندسه ۲

۱– ناحیه ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره محدود است را قطاع دایره می نامند. اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایرهٔ $C(O,R)$ بر حسب درجه مساوی α باشد نشان دهید طول کمان AB برابراست با: $L=\frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$ و مساحت قطاع برابر است با : $S=\frac{\pi R^{۲}\alpha}{۳۶۰}$

حل :

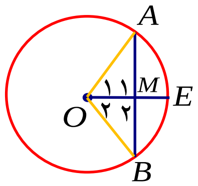


با استفاده از خواص نسبت تناسب می توان نوشت:

$$\begin{array}{cc} ۳۶۰ & P=۲\pi R \\ \alpha & L \end{array} \Rightarrow L=\frac{۲\pi R\alpha}{۳۶۰}=\frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$$

$$\begin{array}{cc} ۳۶۰ & S=\pi R^{۲} \\ \alpha & S' \end{array} \Rightarrow S'=\frac{\pi R^{۲}\alpha}{۳۶۰}$$

۲– ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن دایره وصل کند برآن وتر عمود است و آن را نصف می کند(فرض و حکم را بنویسید).

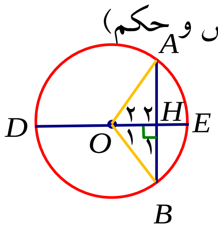


فرض : $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$ حکم : $\hat{M}_۱=\hat{M}_۲=۹۰^\circ$ و $AM=BM$

از نقطه O مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می کنیم در این صورت داریم :

$$\left.\begin{array}{c} OA=OB=R \\ \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE} \Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \\ OM=OM \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{OAM}\cong\overset{\Delta}{OBM} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{M}_۱=\hat{M}_۲ \\ AM=BM \end{array}\right. \xrightarrow{\hat{M}_۱+\hat{M}_۲=۱۸۰^\circ} \hat{M}_۱=\hat{M}_۲=۹۰^\circ$$

۳ – ثابت کنید درهردایره قطرعمود بر وتر ،آن وتر وکمان های نظیرآن وتر رانصف می کند.(با ذکر فرض و حکم)



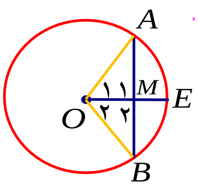
حل:

فرض : $DE\perp AB$ حکم : $AH=BH$ و $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$

از نقطه O مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می کنیم در این صورت داریم :

$$\left.\begin{array}{c} OA=OB=R \\ \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰^\circ \\ OH=OH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{OAH}\cong\overset{\Delta}{OBH} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} AH=BH \\ \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \Rightarrow \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE} \end{array}\right.$$

۴– ثابت کنیددرهر دایره، خطی که مرکزدایره را به وسط وتری از آن دایره که ازمرکز دایره نگذشته باشد، وصل کند بر آن وتر عمود است.(با ذکر فرض و حکم)



فرض : $AM=BM$ حکم : $\hat{M}_۱=\hat{M}_۲=۹۰^\circ$

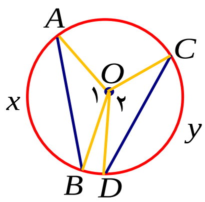
از نقطه O مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می کنیم در این صورت داریم :

$$\left.\begin{aligned} OA=OB=R \\ AM=BM \\ OM=OM \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\overset{\Delta}{A}M \cong O\overset{\Delta}{B}M \Rightarrow \hat{M}_1=\hat{M}_2 \xrightarrow{M_1+M_2=180^\circ} \hat{M}_1=\hat{M}_2=90^\circ$$

۵ – ثابت کنید در یک دایره کمان های نظیر دو وتر مساوی ، با هم برابرند . (با ذکر فرض و حکم)

حل:

فرض : $AB=CD$ حکم : $A\overset{\frown}{x}B=C\overset{\frown}{y}D$

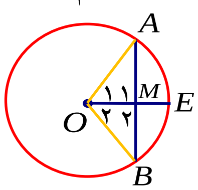


از نقطه O ، مرکز دایره پاره خط هایی به ۴ نقطه D,C,B,A وصل می کنیم در این صورت داریم :

$$\left.\begin{aligned} OA=OC=R \\ OB=OD=R \\ AB=CD \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\overset{\Delta}{A}B \cong O\overset{\Delta}{C}D \Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_2 \Rightarrow A\overset{\frown}{x}B=C\overset{\frown}{y}D$$

۶ – در دایره $C(O,R)$، $\overset{\frown}{AB}=60^\circ$ و $AB=10$ فاصله O از وتر AB را به دست آورید.

می‌دانیم درهر دایره، خطی که از مرکز دایره به یک وترعمود شود، آن وتر و کمان نظیر آن را نصف می کند پس داریم:



$$\overset{\frown}{AE}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}=30^\circ \Rightarrow \text{مرکزی} \quad \text{زاویه} \quad \hat{O}_1=30^\circ$$

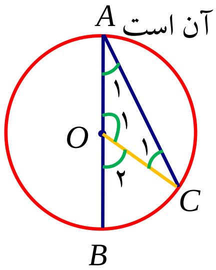
از طرفی می دانیم در مثلث قائم الزاویه، ضلع مقابل به زاویهٔ 30° نصف وتر است بنابراین می توان نوشت:

$$AM=\frac{OA}{2} \xrightarrow{AM=5} OA=10$$

$$O\overset{\Delta}{A}M:\quad \hat{M}_1=90^\circ \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} (OM)^2=(OA)^2-(AM)^2=100-25=75 \Rightarrow OM=5\sqrt{3}$$

۷ – ثابت کنید اندازهٔ زاویهٔ محاطی نصف کمان مقابل به آن است.

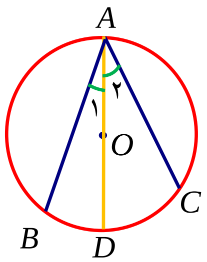
حل :



مسأله را در سه مرحله حل می کنیم : فرض: زاویه $\hat{A}$ محاطی است. حکم : زاویهٔ $\hat{A}$ نصف کمان مقابل به آن است

الف) اگر یک ضلع زاویه محاطی ، قطری از دایره باشد: از نقطه O، به وصل می کنیم در این صورت داریم : $O\overset{\Delta}{A}C:\quad OA=OC=R \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{C}_1$

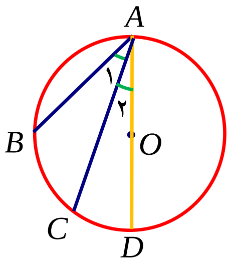
از طرفی زاویه $B\hat{O}C$ ، زاویه خارجی مثلث OAC می باشد پس می توان نوشت :



$$\hat{O}_2=\hat{A}_1+\hat{C}_1=2\hat{A}_1 \xrightarrow{\hat{O}_2=\overset{\frown}{BC}} 2\hat{A}_1=\overset{\frown}{BC} \Rightarrow \hat{A}_1=\frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

ب) اگردو ضلع زاویه محاطی ، در دوطرف نقطه Oواقع باشد: از رأس A به نقطه O وصل کنیم و امتداد دهیم تا دایر ه را در نقطه D قطع کند. طبق قسمت (الف) داریم:

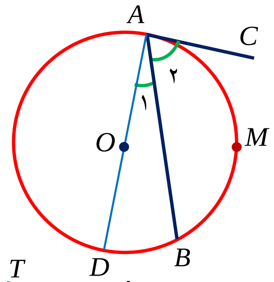
$$\hat{A}=\hat{A}_1+\hat{A}_2=\frac{\overset{\frown}{BD}}{2}+\frac{\overset{\frown}{DC}}{2}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$



ج) اگردو ضلع زاویه محاطی ، در یک طرف نقطه O واقع باشد: از رأس A به نقطه O وصل کنیم و امتداد دهیم تا دایر ه را در نقطه D قطع کند در این صورت با توجه به (الف) داریم:

$$\hat{A}_2=\frac{\overset{\frown}{DC}}{2} \quad \text{و} \quad B\hat{A}D=\hat{A}_1+\hat{A}_2=\frac{\overset{\frown}{BD}}{2} \Rightarrow \hat{A}_1=B\hat{A}D-\hat{A}_2=\frac{\overset{\frown}{BD}}{2}-\frac{\overset{\frown}{CD}}{2}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

۸ – ثابت کنید اندازه هر زاویه ظلی، برابر با نصف کمان رو به روی آن است .

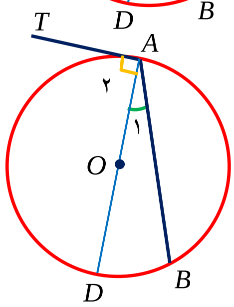


حل:

فرض : $B\hat{A}C$ زاویه ظلی است .　　　حکم : $B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{AMB}}{۲}$

الف) $B\hat{A}T$ زاویهٔ تند(حاده) باشد: قطر AD را رسم می کنیم، پس می توان نوشت :

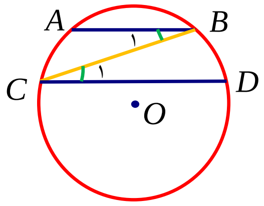
$$\left.\begin{array}{l} D\hat{A}C=۹۰^\circ \quad\Rightarrow\quad D\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \\ D\hat{A}B=\frac{\overset{\frown}{DB}}{۲}\end{array}\right\}\quad B\hat{A}C=D\hat{A}C-D\hat{A}B=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}-\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$



ب) $B\hat{A}T$ زاویهٔ باز(منفرجه) باشد: قطر AD را رسم می کنیم، در این صورت داریم:

$$T\hat{A}B=\hat{A}_۱+\hat{A}_۱=۹۰^\circ+\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ+\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{ADB}}{۲}$$

۹– ثابت کنید دو وتر (غیر متقاطع در دون دایره) از یک دایره موازی اند اگر و فقط اگر کمان های محدود بین آنها مساوی باشند.



حل :

فرض: $AB\|CD$　　حکم: $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$

$AB\,\|\,CD \quad , \quad BC$ مورب $\Rightarrow \quad \hat{C}_۱=\hat{B}_۱ \quad\Rightarrow\quad \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \quad\Rightarrow\quad \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC}$

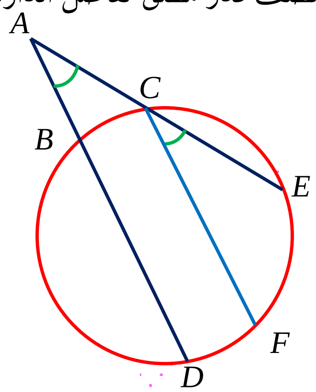
بلعکس:　　فرض: $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$　　حکم: $AB\|CD$

برای اثبات عکس رابطه فوق کافی است کافی مراحل انجام شده را به صورت معکوس انجام دهیم.

$AB\,\|\,CD \quad , \quad BC$ مورب $\Leftarrow \quad \hat{C}_۱=\hat{B}_۱ \quad\Leftarrow\quad \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \quad\Leftarrow\quad \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC}$

می توانستیم در همان رابطهٔ اول از $\Leftrightarrow$ استفاده کنیم.

۱۰ – ثابت کنید اندازه زاویه ای که از برخورد امتداد دو وتر در یک دایره ایجاد می شود برابر نصف قدر مطلق تفاضل اندازه دو کمانی از دایره است که به ضلع ها ی آن زاویه محدودداند.



حل:

فرض : CE و BD وترهایی از دایره هستند که یکدیگر را در نقطه A خارج از دایره قطع می کنند .

حکم : $D\hat{A}E=\frac{\overset{\frown}{DE}-\overset{\frown}{BC}}{۲}$

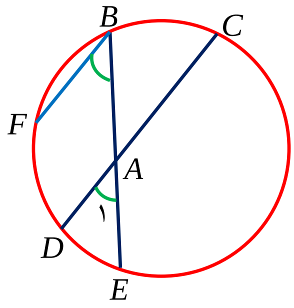
پاره خط CF راموازی BD رسم می کنیم در این صورت داریم:

$$CF\|BD \quad\Rightarrow\quad \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DF} \quad (۱)$$

$$AD \parallel CF \ , \ \text{مورب} \ AE \ \Rightarrow \ D\hat{A}E = F\hat{C}E \overset{\text{زاویه محاطی}}{=} \frac{\overset{\frown}{FE}}{2} = \frac{1}{2}(DE - DF) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}(DE - BC)$$

۱۱- ثابت کنید اندازه زاویه ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می شود برابر نصف قدر مطلق تفاضل اندازه دو کمانی از دایره است که به ضلع ها ی آن زاویه محدوداند.

حل:



فرض: CD و BE وترهایی ازدایره هستندکه یکدیگررا در نقطه A درون دایره قطع می کنند.

حکم : $D\hat{A}E = \dfrac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DE}}{2}$

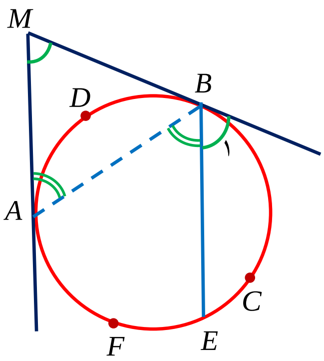
پاره خط BF راموازی DC رسم می‌کنیم در این صورت داریم:

$$BF \parallel CD \ \Rightarrow \ \overset{\frown}{FD} = \overset{\frown}{BC} \quad (1)$$

$$BF \parallel CD \ , \ \text{مورب} \ BE \ \Rightarrow \ D\hat{A}E = F\hat{B}E \overset{\text{زاویه محاطی}}{=} \frac{\overset{\frown}{FE}}{2} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{FD} + \overset{\frown}{DF}\right) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DE}\right)$$

۱۲ – ثابت کنید زاویه بین دوخط مماس رسم شده از دو نقطه A و B بر یک دایره برابر قدرمطلق نصف تفاضل دوکمان ایجاد شده بین نقطه‌های A و B است.

حل :



BE را موازی MA رسم می‌کنیم در این صورت می توان نوشت :

$$MA \parallel BE \ \Rightarrow \ \overset{\frown}{ADB} = \overset{\frown}{AFE} \quad (1)$$

زیرا با رسم پاره خط AB داریم:

$$MA \parallel BE \ , \ \text{مورب} \ AB \ \Rightarrow \ M\hat{A}B = A\hat{B}E$$

$$\Rightarrow \ \frac{\overset{\frown}{ADB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AFE}}{2} \ \Rightarrow \ \overset{\frown}{ADB} = \overset{\frown}{AEF}$$

بنا براین می توان نوشت:

$$MA \parallel BE \ , \ \text{مورب} \ MB \ \Rightarrow \ \hat{M} = \hat{B}_1 \overset{\text{زاویه ظلی}}{=}$$

$$\frac{\overset{\frown}{BCE}}{2} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AEB} - \overset{\frown}{AFE}\right) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AEB} - \overset{\frown}{ADB}\right)$$

۱۳ – در شکل زیر ثابت کنید : $B\hat{M}C = \dfrac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AB}}{2}$

حل :

BD را موازی MC رسم می کنیم ، در این صورت داریم :

$$MC \parallel BD \ \Rightarrow \ \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \quad (1)$$

زیرا با رسم پاره خط AB داریم: